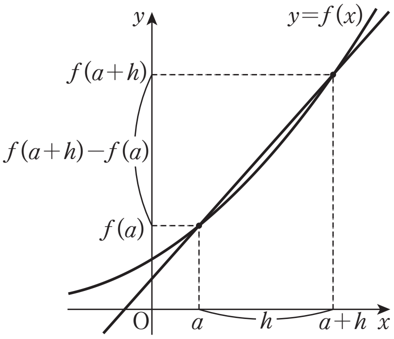
第 7 講　微分係数と導関数

PART1 微分係数と微分可能

要点整理と公式

要点 ① 微分係数と微分可能



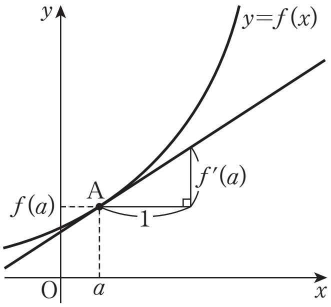
関数 $f(x)$ において，極限値 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，この値を $f(x)$ の $x=a$ における

「　　　　　」(または変化率)

といい，　　　で表す。

微分係数

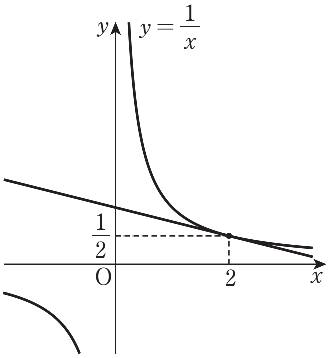
$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$



微分係数 $f'(a)$ が存在するとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で「　　　　　」であるという。

関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線が存在し，その傾きは微分係数 $f'(a)$ に等しい。

(ex) 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線の傾き



$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(\quad)-f(\ )}{}=\lim_{h\to0}\frac{\quad-\quad}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{2(2+h)}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-1}{2(2+h)}=-\frac{1}{4}$$

よって，求める接線の傾きは $-\dfrac{1}{4}$

要点② 微分可能と連続

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$f'(a)$ が存在する。このとき，$x=a$ で連続，すなわち $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ である。これを示す。

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right\}=f'(a)\cdot\quad=\quad$$

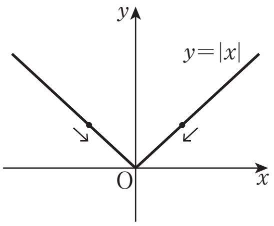
よって $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

微分可能と連続

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$x=a$ で連続である。

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であっても，$f(x)$ は微分可能であるとは限らない。

(ex) 関数 $f(x)=|x|$ は $x=0$ で連続である。



ここで

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{\quad}{h}=$$

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{\quad}{h}=$$

より，右極限と左極限が一致しないので，微分係数 $f'(0)$ は存在しない。

すなわち，$f(x)=|x|$ は $x=0$ で微分可能でない。

1 (1) 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $(3,\ \sqrt{3})$ における接線の傾きを求めよ。

(2) 関数 $f(x)=|x^2-4|$ は $x=2$ で微分可能ではないことを示せ。

Point Pickup

微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

微分係数 $f'(a)$ が存在するとき,

・$f(x)$ は $x=a$ で「微分可能」であるという。

・曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ における接線の傾きが $f'(a)$ である。

微分可能と連続

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能 $\Longrightarrow$ $x=a$で連続

※関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であっても, $x=a$ で微分可能とは限らない。

第 7 講　PART1 確認問題

1 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $(4,\ 2)$ における接線の傾きを求める。

$f(x)=\sqrt{x}$ とおくと，

$$f'(\boxed{ア})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\boxed{イ}+h)-f(\boxed{ウ})}{h}=\boxed{エ}$$

よって，求める接線の傾きは $\boxed{オ}$ である。

$\boxed{エ}$，$\boxed{オ}$ は，下の①～④のうちから選べ。

① $\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{1}{4}$　③ 2　④ 4

2 関数 $f(x)=|x^2-1|$ は，$x=1$ で微分可能かどうかを調べよ。

ただし，$\boxed{サ}$，$\boxed{シ}$ は，下の①，②のうちから選べ。

[解答]

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\boxed{カ}+h)-f(\boxed{カ})}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h^2+\boxed{キ}h|}{h}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{h\to +0}\frac{|h^2+\boxed{キ}h|}{h}=\boxed{ク}$

$$\lim_{h\to -0}\frac{|h^2+\boxed{キ}h|}{h}=\boxed{ケコ}$$

右極限と左極限が，$\boxed{サ}$。

以上より，関数 $f(x)$ は $x=1$ で $\boxed{シ}$。

[$\boxed{サ}$ の選択肢]

① 一致する　② 一致しない

[$\boxed{シ}$ の選択肢]

① 微分可能である　② 微分可能ではない

第 7 講　微分係数と導関数

PART1 微分係数と微分可能

1　(1)　曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $(3,\ \sqrt{3})$ における接線の傾きを求めよ。

(2)　関数 $f(x)=|x^2-4|$ は $x=2$ で微分可能ではないことを示せ。

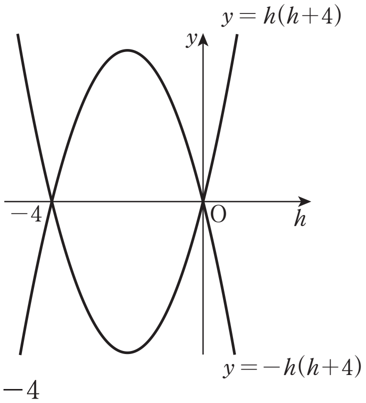
[解答]

(1)
$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{3+h}-\sqrt{3})(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)-3}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

よって，求める接線の傾きは $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

(2)　微分係数 $f'(2)$ が存在しないことを示す。

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|(2+h)^2-4|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h^2+4h|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h(h+4)|}{h}$$



ここで

$$\lim_{h\to +0}\frac{|h(h+4)|}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h(h+4)}{h}=\lim_{h\to +0}(h+4)=4$$
$$\lim_{h\to -0}\frac{|h(h+4)|}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{-h(h+4)}{h}=\lim_{h\to -0}(-h-4)=-4$$

より，右極限と左極限が一致しないので，微分係数 $f'(2)$ は存在しない。

したがって，関数 $f(x)=|x^2-4|$ は $x=2$ で微分可能ではない。

第 7 講 PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：4，ウ：4，エ：②，オ：②

[解説]

$f(x)=\sqrt{x}$ とおくと，求める接線の傾きは

$f'(4)$ である。

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$$ [A]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$ [B]

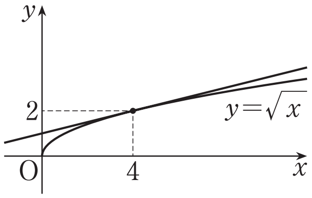
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

よって，求める接線の傾きは $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$



[A]　微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

微分係数 $f'(a)$ が存在するとき，曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ における接線の傾きが $f'(a)$ である。

[B]　分母・分子に $\sqrt{4+h}+2$ をかけて，分子を有理化する。

2 **[正解]** **カ**：1，**キ**：2，**ク**：2，**ケコ**：−2，
サ：②，**シ**：②

[解説]

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{1}+h)-f(1)}{h}$$ [C]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|(1+h)^2-1|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h^2+2h|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h(h+2)|}{h}$$

ここで，

$$\lim_{h\to +0}\frac{|h(h+2)|}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h(h+2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to +0}(h+2)=\mathbf{2}$$ [D]

$$\lim_{h\to -0}\frac{|h(h+2)|}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{-h(h+2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to -0}(-h-2)=\mathbf{-2}$$

よって，右極限と左極限が**一致しない**ので，微分係数 $f'(1)$ は存在しない。

以上より，関数 $f(x)$ は $x=1$ で**微分可能ではない**。[E]

[C] 微分係数
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

[D] 右極限と左極限をそれぞれ求める。

[E] 微分係数 $f'(1)$ が存在しないので，$x=1$ で微分可能ではない。